泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

7.1 等价范数

$\mathbb{R}^N$上的范数

在N维实向量空间$\mathbb{R}^N$上可以定义如下范数：

1. $$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. $$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |\xi_k|$$

3. $$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le N} |\xi_k|$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

等价范数的定义

定义

设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是线性空间 X 上的两个范数，如果存在 $a>0, b>0$ 使得对任意 $x\in X$，有

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1,$$

则称$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是**等价的范数**.

注　范数的“等价”满足自反性、对称性、传递性.

等价范数的刻画

定理 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 的两个等价范数，则对任何 $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0.$$

证 由等价范数的定义，存在 $a > 0$, $b > 0$, 使得

$$\|x_n - x_0\|_2 \le b\|x_n - x_0\|_1,$$

$$a\|x_n - x_0\|_1 \le \|x_n - x_0\|_2.$$

等价范数的刻画

推论 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是线性空间 X 的两个等价范数，则$(X,\|\cdot\|_1)$是Banach空间的充分必要条件是$(X,\|\cdot\|_2)$是Banach空间.

$\mathbb{R}^N$上范数的等价性

命题 在N维实向量空间$\mathbb{R}^N$上定义的如下范数是等价的：

$$\|x\|_2=\Big(\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}},\ \|x\|_1=\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|,\quad \|x\|_\infty=\max_{1\le k\le N}|\xi_k|.$$

证

$$\|x\|_2=\Big(\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|=\|x\|_1\le\sqrt{N}\Big(\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{N}\|x\|_2;$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le k\le N}|\xi_k|\le\Big(\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_2\le\sqrt{N}\max_{1\le k\le N}|\xi_k|=\sqrt{N}\|x\|_\infty.$$

范数等价定理(有限维)

定理 在N维线性空间 X上的任意两个范数都是等价的.

证 设$\{e_1,\cdots,e_N\}$是X的一个基，则对每一个 $x\in X$，存在唯一的 $\bar{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{K}^N$，使得

$$x=\xi_1 e_1+\cdots+\xi_N e_N.$$

定义

$$\|x\|_{\mathbb{K}^N}=\|\bar{x}\|_2=\Big(\sum_{k=1}^{N}|\xi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

则$\|\cdot\|_{\mathbb{K}^N}$是 X 的一个范数.

范数等价定理(有限维)

定理 在N维线性空间 X上的任意两个范数都是等价的.

证 设$\|\cdot\|$是X的任一范数，则由三角不等式以及Cauchy不等式得

$$
\begin{aligned}
\|x\| &= \|\sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k\| \le \sum_{k=1}^{N} |\xi_k| \|e_k\| \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = b\|x\|_{\mathbb{K}^N}
\end{aligned}
$$

其中 $b = (\sum_{k=1}^{N} \|e_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$ 是与 x 无关的常数.

范数等价定理(有限维)

定理 在N维线性空间 X上的任意两个范数都是等价的.

证 在 $\mathbb{K}^N$的单位球面 S上定义

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1, \cdots, \xi_N) = \|\sum_{k=1}^{N} \xi_k e_k\| = \|x\|.$$

则对任意 $\bar{x}, \bar{y} \in S$, 有 $f(\bar{x}) > 0$, 并且

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = |\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le b\|\bar{x} - \bar{y}\|_2.$$

所以 f 是 S上的连续函数.

范数等价定理(有限维)

定理 在N维线性空间 X上的任意两个范数都是等价的.

证 因为 S 是 $\mathbb{K}^N$的紧集，因此 f 在 S 上可取到最小值 $a>0$.

对任何 $x\in X$，$x\neq\theta$，有

$$\frac{\bar{x}}{\|x\|_{\mathbb{K}^N}}\in S,$$

于是

$$f\left(\frac{\bar{x}}{\|x\|_{\mathbb{K}^N}}\right)=\frac{\|x\|}{\|x\|_{\mathbb{K}^N}}\geq a.$$

综上可知，

$$a\|x\|_{\mathbb{K}^N}\leq\|x\|\leq b\|x\|_{\mathbb{K}^N}.$$

小结

- 等价范数的定义
- 等价范数的刻画
- 有限维空间上范数等价定理

泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

7.2　赋范空间的同构

线性同构

定义

设 X, Y 都是线性空间，若存在映射 $T: X \to Y$，满足

1. T 是双射；
2. T 是线性映射，即对任意的 $x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(x+y) = Tx + Ty,\ T(\alpha x) = \alpha Tx,$$

则称 T 是**线性同构映射**. 并称 X 与 Y **线性同构**.

线性同构

定理 数域 $\mathbb{K}$ 上的 N 维线性空间 X 与 $\mathbb{K}^N$ 线性同构.

证 设 $\{e_1, \cdots, e_N\}$ 为 X 的基，则对每一个 $x \in X$, 存在唯一的 $\bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_N) \in \mathbb{K}^N$，使得

$$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_N e_N.$$

定义 $T : X \to \mathbb{K}^N$ 为

$$Tx = \overline{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_N),$$

则 T 为 X 到 $\mathbb{K}^N$ 的线性同构映射，所以 X 与 $\mathbb{K}^N$ 线性同构.

赋范空间的同构

定义

设 X,Y 是赋范空间，映射 $T:X\to Y$满足

1. T是线性映射且为双射，
2. T与 T^{-1}都是连续的，

则称 X 与 Y **拓扑同构**，并称 T为**拓扑同构映射**.

有限维赋范空间的同构

定理 数域 $\mathbb{K}$ 上的N维赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 与 $(\mathbb{K}^N,\|\cdot\|_2)$是拓扑同构的.

证 设$\{e_1,\cdots,e_N\}$是X 的一个基，则对每一个 $x\in X$，存在唯一的

$\bar{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_N)\in\mathbb{K}^N$，使得 $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_Ne_N$.

定义

$$Tx=\bar{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$$

则 T 是从 X 到$\mathbb{K}^N$的线性映射且为双射.

有限维赋范空间的同构

定理 数域 $\mathbb{K}$ 上的N维赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 与 $(\mathbb{K}^N,\|\cdot\|_2)$是拓扑同构的.

证 下证 T 与 T^{-1}是连续的. 记 $\|x\|_{\mathbb{K}^N}=\|Tx\|_2=\|\overline{x}\|_2$.

因为$\|\cdot\|_{\mathbb{K}^N}$与$\|\cdot\|$是 X 的两个等价范数，即存在 $a>0,b>0$，使得

$$a\|x\|\leq\|x\|_{\mathbb{K}^N}=\|Tx\|_2\leq b\|x\|.$$

因而

$$\|Tx-Ty\|_2\leq b\|x-y\|,\qquad \|T^{-1}\bar{x}-T^{-1}\bar{y}\|\leq\frac{1}{a}\|\bar{x}-\bar{y}\|_2,$$

因而 T 与T^{-1}均连续.

有限维与完备性

推论 1 任一有限维赋范空间都是Banach空间.

证 设X为N维赋范线性空间，T为从X到$\mathbb{K}^N$的拓扑同构映射.

设$\{x_n\}$是X的任一柯西列，则$\{Tx_n\}$是$\mathbb{K}^N$中的柯西列.

由$\mathbb{K}^N$的完备性知，存在$y \in \mathbb{K}^N$, 使得 $Tx_n \to y \ (n \to \infty)$.

由T是双射知，存在唯一的$x \in X$, 使得 $Tx = y$. 因为T^{-1}连续，

所以

$$x_n \to x \ (n \to \infty).$$

有限维与闭子空间

推论 2 赋范空间的有限维子空间必为Banach空间，从而是闭子空间.

证 只需证明，若赋范空间 X 的子空间 E 是完备的，则 E 是 X 中闭集.

任取 $x \in \overline{E}$. 则存在 $\{x_n\} \subset E$, 使得

$$x_n \to x \quad (n \to \infty).$$

因为收敛列必为柯西列，且 E 完备，故存在 $y \in E$, 使得

$$x_n \to y \quad (n \to \infty).$$

由极限的唯一性可知，$x = y \in E$. 所以 E 是闭集.

小结

- 线性同构的定义
- 拓扑同构的定义
- 有限维赋范空间的同构定理
- 有限维与完备性、闭子空间

泛函分析

Functional Analysis

西北大学

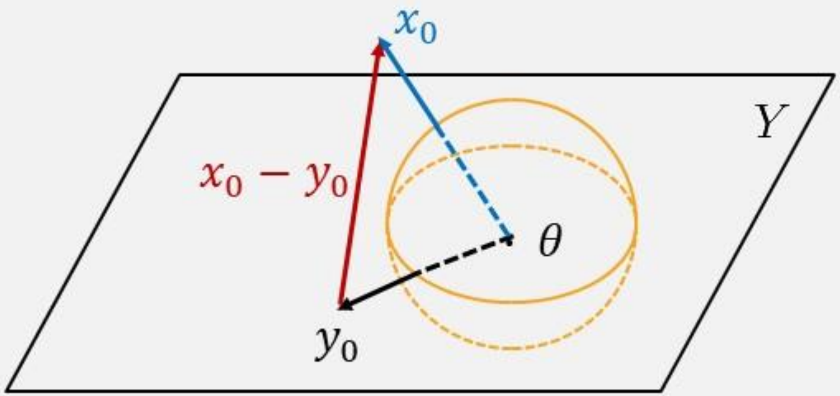
NORTHWEST UNIVERSITY

7.3　有限维赋范空间的特征

Riesz引理

定理 设 Y 是赋范空间 X 的真闭子空间，则任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $x_\varepsilon \in X$，使得 $\|x_\varepsilon\| = 1$，并且

$$d(x_\varepsilon, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon.$$



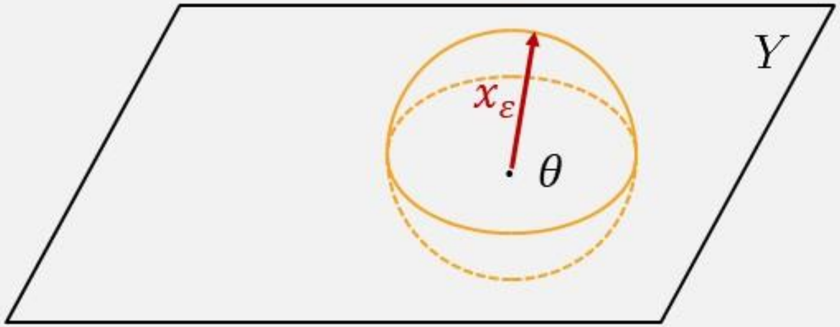
$$\|x_0 - y_0\| < \frac{d(x_0, Y)}{1 - \varepsilon}$$

Riesz引理

定理

设 Y 是赋范空间 X 的真闭子空间，则任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $x_\varepsilon \in X$，使得 $\|x_\varepsilon\| = 1$，并且

$$d(x_\varepsilon, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon.$$



$$1 \leq \frac{d(x_\varepsilon, Y)}{1-\varepsilon}$$

Riesz引理

定理 设 Y 是赋范空间 X 的真闭子空间，则任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $x_\varepsilon \in X$，使得 $\|x_\varepsilon\| = 1$，并且

$$d(x_\varepsilon, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon.$$

证 取 $x_0 \in X \setminus Y$，记

$$d = d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|,$$

则 $d > 0$. 对任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，由于

$$d < \frac{d}{1-\varepsilon},$$

故存在 $y_0 \in Y$，使得

$$\|x_0 - y_0\| < \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Riesz引理

定理 设 Y 是赋范空间 X 的真闭子空间，则任意的 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $x_\varepsilon \in X$，使得 $\|x_\varepsilon\| = 1$，并且

$$d(x_\varepsilon, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1-\varepsilon.$$

证 令 $x_\varepsilon = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$，则 $\|x_\varepsilon\| = 1$，且对任意的 $y \in Y$，

$$\|x_\varepsilon - y\| = \|\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\|y)\|$$

$$> \frac{1-\varepsilon}{d} d(x_0, Y) = 1-\varepsilon.$$

因而 $$d(x_\varepsilon, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_\varepsilon - y\| \geq 1-\varepsilon.$$

有限维赋范空间的同构

定理 数域 $\mathbb{K}$ 上的N维赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 与 $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_2)$是拓扑同构的.

有限维赋范空间的特征

定理 设 X 是有限维赋范空间，则 X 中每个有界集是列紧集.

证 设 M 是 X 中的有界集，只需证明 M 是列紧集. 不妨设 $\dim X = N$.

设 T 是从 X 到 $\mathbb{K}^N$ 的拓扑同构映射，则存在 $b > 0$，使得对任意 $x \in M$,

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_{\mathbb{K}^N} \leq b\|x\|.$$

因而 $T(M)$ 是 $\mathbb{K}^N$ 中的有界集.

因为 $\mathbb{K}^N$ 中的有界集都是列紧集，T^{-1} 连续，所以 M 是列紧集.

有限维赋范空间的特征

定理 设 X 是有限维赋范空间，则 X 中每个有界集是列紧集.

如果赋范空间 X 中每个有界集都是列紧集，是否有 X 是有限维的？

有限维赋范空间的特征

定理 赋范空间 X 是有限维的当且仅当 X 的单位闭球 $\overline{B} = \overline{B}(\theta, 1)$ 是紧集.

证 只需证明: 若 $\overline{B}$ 是紧集，则 X 是有限维的. 利用反证法.

假设 X 是无穷维的，则存在线性无关集 $\{e_n\} \subset X$. 对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$X_n = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\},$$

则 X_n 是 X 的有限维子空间，从而是闭子空间.

因而对每一个 $n = 1, 2, \cdots$, 有 X_n 是 X_{n+1} 的真闭子空间.

有限维赋范空间的特征

定理 赋范空间 X 是有限维的当且仅当 X 的单位闭球 $\overline{B}=\overline{B}(\theta,1)$ 是紧集.

证 利用Riesz引理，存在 $x_n \in X_n$, 使得 $\|x_n\|=1$ 且

$$d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

于是 $\overline{B}$ 中的点列 $\{x_n\}$ 满足: 对任意 $m>n$, 有

$$\|x_m - x_n\| \geq d(x_m, X_{m-1}) \geq \frac{1}{2},$$

故 $\{x_n\}$ 的任一子列都不可能是柯西列，从而无收敛子列.

这与 $\overline{B}$ 是紧集矛盾.

有限维赋范空间的特征

定理

设 X 是赋范空间，则以下命题等价：

1. X 是有限维的;
2. X 的有界集是列紧集;
3. X 的有界闭集是紧集;
4. X 的单位闭球是紧集；
5. X 的单位球面是紧集.

小结

- Riesz引理
- 有限维赋范空间的特征

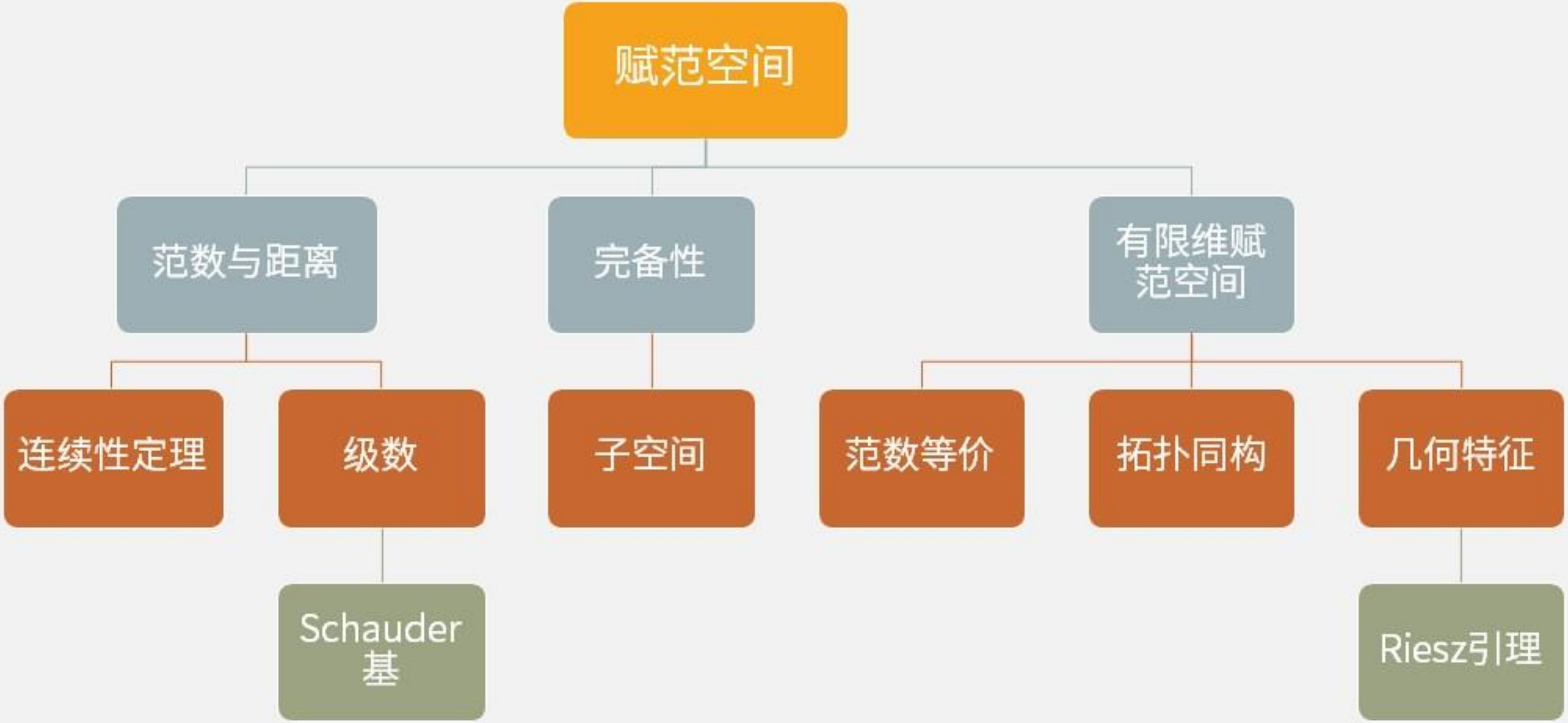
泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

7.4　知识小结

一、知识框图


赋范空间
范数与距离
完备性
有限维赋范空间
连续性定理
级数
子空间
范数等价
拓扑同构
几何特征
Schauder基
Riesz引理

二、知识串讲

1 线性空间

1. 子集 A 的线性包 $spanA$ 是包含 A的最小闭子空间.

2. 线性空间的一个子集线性无关的定义.

3. 任何非零线性空间都存在Hamel基.

4. 数域 K 上的两个 N 维线性空间必线性同构.

二、知识串讲　　2 赋范空间的基本性质

1. 赋范空间一定是距离空间.
2. 范数与线性运算都是连续的.
3. 具有Schauder基的赋范空间一定是可分的.
4. 赋范空间完备的充分必要条件是每个绝对收敛的级数都收敛.

二、知识串讲

3 赋范空间的几何特征

1. 赋范空间的单位球是凸邻域.

2. 有限维赋范空间的子空间一定是闭的.

3. 无限维赋范空间的子空间一定不是开的，可能也不是闭的.

二、知识串讲　　4 有限维赋范空间

1. 有限维线性空间上的任意两个范数都是等价的.

2. 数域 K 上的任何两个 N 维赋范空间都是拓扑同构的.

3. 赋范空间是有限维的充要条件是其上的任何有界集都是列紧集.

4. 有限维赋范空间一定是Banach空间. 有限维子空间一定是闭子空间.

泛函分析

Functional Analysis

NORTHWEST UNIVERSITY · XI'AN CHINA · 1902

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

7.5　典型例题

一、范数与距离

例 1

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，d 为其上的距离，且满足

$$d(x+z,y+z)=d(x,y);$$
$$d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y).$$

令

$$\|x\|=d(x,\theta),$$

则 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.

一、范数与距离

例 2

设$(X,\|\cdot\|)$是赋范空间. 对任意 $x,y\in X$, 定义

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1+\|x-y\|, & x\neq y.\end{cases}$$

证明：d 是 X 上的一个距离，但不是由范数诱导的.

证明思路

只需证明 d 不满足相似性：

$$d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y).$$

二、Banach空间

例 3

设$(X,\|\cdot\|)$是赋范空间, $X\neq\{\theta\}$. 证明：X是Banach空间的充分必要条件是X中的单位球面$S=\{x\in X:\|x\|=1\}$是完备的.

证明大意

充分性. 设$\{x_n\}$是X中任一柯西列，则$\{\|x_n\|\}$是$\mathbb{R}$中柯西列.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=a$.

分两种情形讨论：$a=0$ 和 $a\neq 0$.

三、等价范数

例 4

在 $C[0,1]$ 中，对任意 $x \in C[0,1]$，令

$$\|x\|_1 = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^1 (1+t)|x(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

证明：$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是两个等价范数.

四、有限维赋范空间

例 5

设 $P_n[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上次数不超过 n 的多项式全体. 令

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

证明: $(P_n[a,b], \|\cdot\|)$ 是Banach空间.

四、有限维赋范空间

例 6

设 M 是赋范空间 X 上的有限维子空间，则对任意 $x \in X$, 存在 $y \in M$, 使得

$$\|x-y\| = \inf_{a \in M} \|x-a\|.$$

证明思路

存在有界列 $\{a_n\} \subset M$, 使得 $\|x-a_n\| \to d = \inf\limits_{a \in M} \|x-a\|$. 利用有限维空间中的有界集必为列紧集, $\{a_n\}$ 存在收敛子列，其极限即为 y.

四、有限维赋范空间

例 7

设 M 是赋范空间 X 上的有限维真子空间，则存在 $x_0 \in X$，使得

$$\|x_0\| = 1,\ \ d(x_0, M) = 1.$$

证明思路

利用Riesz引理，存在有界列 $\{x_n\} \subset X$，满足

$$\|x_n\| = 1,\ \ d(x_n, M) > 1 - \frac{1}{2^n}.$$

再结合有限维赋范空间中有界列的列紧性可得结论.