泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

9.1　正交与正交补

正交的定义

定义

设 H 是内积空间, $x, y \in H$, $M, N \subset H$.

1. 若 $(x, y) = 0$, 则称 x 与 y **正交**. 记为 $x \perp y$.
2. 若 x 与 M 中的每个向量正交，则称 x 与 M **正交**. 记为 $x \perp M$.
3. 若对任意 $x \in M, y \in N$, 都有 $x \perp y$, 则称 M 与 N **正交**. 记为 $M \perp N$.

注 零元是唯一一个与所有向量均正交的向量.

勾股定理

定理

设 H 是内积空间，$x, y \in H$ 且 $x \perp y$，则有

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

证

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\ &= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2.\end{aligned}$$

勾股定理

推论 设$x_1, \cdots, x_N$在内积空间H中两两正交，则有

$$\|x_1 + \cdots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_N\|^2.$$

正交补的定义

定义

设 H 是内积空间，M是 H 的子集，H中所有与 M 正交的元素组成的集合称为 M 的正交补，记为 $M^{\perp}$. 即

$$M^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp M\}.$$

正交补的性质

定理 设 M 是内积空间 H 的子集，则 $M^{\perp}$ 为 H 的闭子空间.

证 任取 $x, y \in M^{\perp}$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$，则对任意 $z \in M$，

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,$$

因此 $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$，即 $M^{\perp}$ 是 H 的线性子空间.

若 $\{x_n\} \subset M^{\perp}, x_n \to x$，则对任意 $z \in M$，由内积的连续性

$$(x, z) = (\lim_{n\to\infty} x_n, z) = \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = 0,$$

即 $x \in M^{\perp}$，故 $M^{\perp}$ 是 H 的闭子空间.

正交补的性质

定理

设H是内积空间，M是H的子集，则

1. $\theta \in M^{\perp}$, $\{\theta\}^{\perp} = H$, $H^{\perp} = \{\theta\}$.
2. 若 $\theta \in M$, 则 $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$, 否则$M \cap M^{\perp} = \emptyset$.
3. 若$B(x_0, r) \subset M$, 则 $M^{\perp} = \{\theta\}$;

   一般地, 若M是一个非空开集，则 $M^{\perp} = \{\theta\}$.
4. 若 $N \subset M$, 则 $M^{\perp} \subset N^{\perp}$.
5. $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

正交补的性质

命题

设 H 是内积空间，M 是 H 的稠密子集，则

$$M^{\perp} = \{\theta\},$$

即与 H 的稠密子集正交的向量只有零向量.

证

由 M 在 H 中稠密知，对任意 $x \in M^{\perp} \subset H$, 存在$\{x_n\} \subset M$, 使得

$$x_n \to x \ (n \to \infty).$$

由内积的连续性，

$$(x, x) = (\lim_{n\to\infty} x_n, x) = \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0,$$

所以 $x = \theta$.

正交补的性质

命题 设 H 是内积空间，M 是 H 的一个子集，则

$$M^{\perp} = (\overline{\mathrm{span} M})^{\perp}.$$

证 一方面，由于 $M \subset \overline{\mathrm{span} M}$，因此 $(\overline{\mathrm{span} M})^{\perp} \subset M^{\perp}$.

另一方面，对任意 $x \in M^{\perp}$，有 $M \subset \{x\}^{\perp}$.

由于 $\{x\}^{\perp}$是H 的闭子空间，则有 $\overline{\mathrm{span} M} \subset \{x\}^{\perp}$，即

$$x \in (\overline{\mathrm{span} M})^{\perp},$$

所以
$$M^{\perp} \subset (\overline{\mathrm{span} M})^{\perp}.$$

正交补的刻画

定理 设 E 是内积空间 H 的线性子空间. 则 $x \in E^{\perp}$ 的充分必要条件是对任意的 $y \in E$, 有 $\|x-y\| \geq \|x\|$.

证 (必要性) 因为 $x \in E^{\perp}, y \in E$, 利用勾股定理可知

$$\|x-y\|^2 = \|x+(-y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

正交补的刻画

定理 设 E 是内积空间 H 的线性子空间. 则 $x \in E^{\perp}$ 的充分必要条件是对任意的 $y \in E$, 有 $\|x-y\| \geq \|x\|$.

证 （充分性） 只需证明对任意 $y \in E, \|y\|=1$, 有 $(x, y)=0$.

事实上，任取 $\alpha \in \mathbb{K}$, 有 $\alpha y \in E$, 于是 $\|x-\alpha y\| \geq \|x\|$.

$$
\begin{aligned}
\|x-\alpha y\|^2 &= (x-\alpha y, x-\alpha y) \\
&= \|x\|^2-\overline{\alpha}(x, y)-\alpha(y, x)+|\alpha|^2\|y\|^2 \\
&= \|x\|^2-\overline{\alpha}(x, y)-\alpha\overline{(x, y)}+|\alpha|^2 \geq \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

正交补的刻画

定理 设 E 是内积空间 H 的线性子空间. 则 $x \in E^{\perp}$ 的充分必要条件是对任意的 $y \in E$, 有 $\|x - y\| \geq \|x\|$.

证 （充分性） 只需证明对任意 $y \in E, \|y\| = 1$, 有 $(x, y) = 0$.

事实上，任取 $\alpha \in \mathbb{K}$, 有 $\alpha y \in E$, 于是 $\|x - \alpha y\| \geq \|x\|$.

$$-\overline{\alpha}(x, y) - \alpha\overline{(x, y)} + |\alpha|^2 \geq 0.$$

取 $\alpha = (x, y)$, 代入上式得 $-|(x, y)|^2 \geq 0$.

所以 $(x, y) = 0$.

小结

- 正交的定义
- 勾股定理
- 正交补的定义
- 正交补的性质
- 正交补的刻画

泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

9.2　投影定理

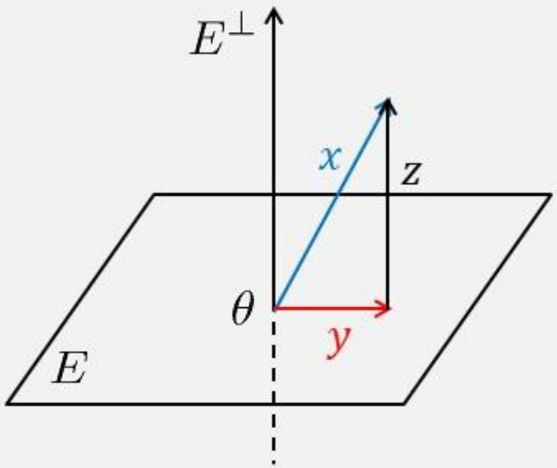
投影的定义

定义

设 E 是内积空间 H 的线性子空间，$x \in H$, 若存在 $y \in E$, $z \in E^{\perp}$, 使得

$$x = y + z,$$

则称 y 为 x 在 E 上的**投影**，记作 $y = P_E x$.



投影的定义

定义

设 E 是内积空间 H 的线性子空间，$x \in H$, 若存在 $y \in E$, $z \in E^{\perp}$, 使得

$$x = y + z,$$

则称 y 为 x 在 E 上的**投影**，记作 $y = P_E x$.

注 设 $x \in H$, $y \in E$, 则 $y = P_E x \iff x - y \in E^{\perp}$.

投影的定义

定义

设 E 是内积空间 H 的线性子空间，$x \in H$, 若存在 $y \in E$, $z \in E^{\perp}$, 使得

$$x = y + z,$$

则称 y 为 x 在 E 上的**投影**，记作 $y = P_E x$.

注 投影若存在必唯一.

证 设 $x = y + z$, $x = y' + z'$, 其中 $y, y' \in E$, $z, z' \in E^{\perp}$.

则 $y - y' = z' - z \in E \cap E^{\perp} = \{\theta\}$,

因此 $y = y'$, 即 x 在 E 上的投影是唯一的.

投影的刻画

定理 设 E 是内积空间 H 的子空间，$x \in H$, $y \in E$. 则 $y = P_E x$ 的充要条件是

$$\|x - y\| = \inf_{a \in E} \|x - a\|.$$

$$y = P_E x \iff x - y \in E^{\perp}$$

证明思路

投影的刻画

定理 设 E 是内积空间 H 的子空间，$x \in H$, $y \in E$. 则 $y = P_E x$ 的充要条件是

$$\|x - y\| = \inf_{a \in E} \|x - a\|.$$

$$y = P_E x \iff x - y \in E^{\perp}$$

证明思路

设 E 是内积空间 H 的子空间. 则 $x \in E^{\perp}$ 的充要条件是对任意的 $a \in E$, 有 $\|x - a\| \geq \|x\|$.

回顾

投影的刻画

定理 设 E 是内积空间 H 的子空间，$x \in H$, $y \in E$. 则 $y = P_E x$ 的充要条件是

$$\|x - y\| = \inf_{a \in E} \|x - a\|.$$

证明思路

$$y = P_E x \iff x - y \in E^{\perp}$$

$$\iff \text{对任意 } a \in E,\ \text{有} \|x - y - a\| \geq \|x - y\|.$$

$$\iff \text{对任意 } a \in E,\ \text{有} \|x - a\| \geq \|x - y\|.$$

$$\iff \|x - y\| = \inf_{a \in E} \|x - a\|.$$

最佳逼近点

定义

设 M 是内积空间 H 的子集，$x \in H$，若存在 $y \in M$，使得

$$\|x - y\| = \inf_{a \in M} \|x - a\|,$$

则称 y 为 x 在 M 中的**最佳逼近点**.

注　在内积空间中，投影与最佳逼近点是等价的.

最佳逼近定理

定理 设M是内积空间H的完备凸集，则对任意 $x \in H$, 存在唯一的 $y \in M$, 使得

$$\|x-y\| = \inf_{a \in M} \|x-a\|.$$

证 （存在性）由下确界的定义，存在 $\{a_n\} \subset M$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \|x-a_n\| = d := \inf_{a \in M} \|x-a\|.$$

由于 M 是凸集，则对任意正整数 m, n，有 $\dfrac{a_n+a_m}{2} \in M.$

可验证$\{a_n\}$是M中的柯西列.

证明
细节

$$\begin{aligned}\|a_m - a_n\|^2 &= \|(x-a_n)-(x-a_m)\|^2\\ &= 2(\|x-a_n\|^2+\|x-a_m\|^2) - \|(x-a_n)+(x-a_m)\|^2\\ &= 2(\|x-a_n\|^2+\|x-a_m\|^2) - 4\|x-\frac{a_n+a_m}{2}\|^2\\ &\le 2(\|x-a_n\|^2+\|x-a_m\|^2) - 4d^2 \to 0\,(m,n\to\infty).\end{aligned}$$

证

（存在性）由下确界的定义，存在 $\{a_n\}\subset M$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x-a_n\| = d := \inf_{a\in M}\|x-a\|.$$

由于 M 是凸集，则对任意正整数 m,n，有 $\dfrac{a_n+a_m}{2}\in M.$

可验证 $\{a_n\}$ 是 M 中的柯西列.

最佳逼近定理

定理 设 M 是内积空间 H 的完备凸集，则对任意 $x \in H$, 存在唯一的 $y \in M$, 使得

$$\|x-y\| = \inf_{a \in M} \|x-a\|.$$

证 （存在性）由下确界的定义，存在 $\{a_n\} \subset M$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|x-a_n\| = d := \inf_{a \in M} \|x-a\|.$$

由于 M 是凸集，则对任意正整数 m, n，有 $\dfrac{a_n+a_m}{2} \in M.$

可验证 $\{a_n\}$ 是 M 中的柯西列. 由 M 的完备性知，存在 $y \in M$，使得

$$a_n \to y \ (n \to \infty).$$

因此

$$\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x-a_n\| = d.$$

最佳逼近定理

定理 设M是内积空间H的完备凸集，则对任意 $x\in H$, 存在唯一的 $y\in M$, 使得

$$\|x-y\|=\inf_{a\in M}\|x-a\|.$$

证

（唯一性） 假设 $\tilde{y}\in M$，满足$\|x-\tilde{y}\|=d.$

由平行四边形法则，有

$$\begin{aligned}\|y-\tilde{y}\|^2&=\|(x-\tilde{y})-(x-y)\|^2\\&=2(\|x-\tilde{y}\|^2+\|x-y\|^2)-4\|x-\frac{y+\tilde{y}}{2}\|^2\\&\le 2(d^2+d^2)-4d^2=0,\end{aligned}$$

所以 $y=\tilde{y}.$

投影定理

定理 设 E 是Hilbert空间 H 的闭子空间，则对任意 $x \in H$，x 在 E 上存在唯一的投影. 即存在唯一的 $y \in E, z \in E^{\perp}$，使得

$$x = y + z.$$

证 因为Hilbert空间的闭子空间是完备凸集，则由最佳逼近定理知，对任意 $x \in H$，x 在 E 上存在唯一的最佳逼近点.

利用最佳逼近点与投影的等价性，结论成立.

投影定理的推论

推论 设 E 是Hilbert空间 H 的子空间，则

$$(E^{\perp})^{\perp}=\overline{E}.$$

证 由定义知， $E\subset(E^{\perp})^{\perp}$. 因正交补是闭子空间，故有 $\overline{E}\subset(E^{\perp})^{\perp}$.

反之，任取 $x\in(E^{\perp})^{\perp}$, 则 $P_{E^{\perp}}x=\theta$. 由投影定理可得，

$$x=P_{\overline{E}}x+P_{E^{\perp}}x=P_{\overline{E}}x.$$

因此，$x=P_{\overline{E}}x\in\overline{E}$, 即 $(E^{\perp})^{\perp}=\overline{E}$.

投影定理的推论

推论

设 M 是Hilbert空间 H 的子集，则

1. $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{span} M}$.
2. $\mathrm{span} M$ 在 H 中稠密当且仅当 $M^{\perp} = \{\theta\}$.

小结

- 投影的定义
- 投影的刻画
- 最佳逼近定理
- 投影定理

泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

9.3 正交系与Fourier级数

正交系的定义

定义

设$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是内积空间$H$中由非零元组成的集合，若当 $\alpha\neq\beta$ 时

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0,$$

则称$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为$H$的一个**正交系**. 进一步，若对每一个 $\alpha\in\Lambda$,

$$\|x_\alpha\| = 1,$$

则称$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为$H$的一个**标准正交系**.

标准正交系的例

例 1

在 $\mathbb{K}^N$ 中，

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, \cdots, 0),\ e_N = (0, 0, \cdots, 1)$$

是一个标准正交系.

标准正交系的例

例 2

在 l^2 中，

$$e_n = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{n-1}, 1, 0, \cdots), \ (n = 1, 2, \cdots)$$

是一个标准正交系.

标准正交系的例

例 3

在实 $L^2[-\pi,\pi]$ 中,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \cdots\right\}$$

是一个标准正交系.

标准正交系的例

例 4 在复 $L^2[-\pi,\pi]$ 中，

$$\left\{\frac{e^{\mathrm{i}nt}}{\sqrt{2\pi}} \mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$$

是一个标准正交系.

Fourier级数的引入

命题 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 H 的一个标准正交系，$x \in H$，且存在 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$，使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

则有

$$\alpha_n = (x, e_n), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证 由正交性及内积的连续性，

$$\begin{aligned}(x, e_k) &= (\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_k) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, e_k) = \alpha_k (e_k, e_k) = \alpha_k.\end{aligned}$$

Fourier级数的定义

定义

设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 H 的一个标准正交系，$x \in H$，称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$$

为 x 关于标准正交系 $\{e_n\}$ 的**Fourier级数**，(x, e_n) 称为 x 关于 e_n 的**Fourier系数**.

1. x 的Fourier级数是否收敛?
2. 若收敛，它是否收敛到 x ?

Fourier级数的收敛性

引理 设$\{e_n\}$是内积空间H的一个标准正交系，则对每一个 $n \in \mathbb{N},\ x \in H,$

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.$$

证 令$x_n = x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k$，则对每一个$i = 1, 2, \cdots, n$，有

$$(x_n, e_i) = (x, e_i) - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(e_k, e_i) = (x, e_i) - (x, e_i) = 0,$$

即$x_n \perp \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$， 由勾股定理可得，

$$\|x\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\|(x, e_k)e_k\|^2 + \|x_n\|^2.$$

Fourier级数的收敛性

引理 设$\{e_n\}$是内积空间H的一个标准正交系，则对每一个 $n \in \mathbb{N},\ x \in H,$

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.$$

令 $M_n = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\},$

则 x 在M_n 上的投影为 $\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k.$

Bessel不等式

定理 设$\{e_n\}$是内积空间H的一个标准正交系，则对任意 $x \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

证 由引理知

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \|x_n\|^2,$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

令 $n \to \infty$ 即得Bessel不等式.

Fourier级数的收敛性

定理 设$\{e_n\}$是Hilbert空间 H 的一个标准正交系，$x \in H$，则 x 的Fourier级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 收敛.

证 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, (n = 1, 2, \cdots)$. 则对任意的正整数 n, p, 有

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p}(x, e_k)e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p}|(x, e_k)|^2,$$

由Bessel不等式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$ 收敛，从而$\{S_n\}$是H中的Cauchy列，

利用 H 的完备性可得命题成立.

Fourier级数的收敛性

定理 设$\{e_n\}$是内积空间H的一个标准正交系，$x \in H$，则

$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 的充分必要条件是 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$.

证 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k,\ T_n = \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2\ \ (n = 1, 2, \cdots)$.

由引理知 $$\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2,$$

即 $$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - T_n,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} S_n = x \iff \lim_{n\to\infty} T_n = \|x\|^2.$$

小结

- 正交系的定义与例
- **Fourier**级数的定义
- **Fourier**级数的收敛性

泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

9.4 正交基

正交基的定义

定义

设 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是内积空间 H 中的正交系，如果

$$\overline{\mathrm{span}\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}} = H,$$

则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 H 的一个**正交基.**

标准正交基的例

例 1

在 $\mathbb{R}^N$ 中,

$e_1=(1,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,\cdots,0),\ e_N=(0,0,\cdots,1)$

是一个标准正交基.

标准正交基的例

例 2

在实 $L^2[-\pi,\pi]$ 中,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$$

是一个标准正交基.

证

(1) 平方可积的函数可由连续函数一致逼近;

(2) 连续函数可由三角多项式

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

一致逼近.

正交系的完备性

定义

设 $\{e_n\}$ 是内积空间 H 的一个标准正交系，$x \in H$，等式

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

称为 x 关于 $\{e_n\}$ 的**Parseval等式.**

若对每一个 $x \in H$，x 关于 $\{e_n\}$ 的Parseval等式成立，则称 $\{e_n\}$ 是**完备的.**

正交系的完全性

定义

设 $\{e_n\}$ 是内积空间 H 的一个标准正交系，如果

$$\{e_n\}^{\perp} = \{\theta\},$$

称为 $\{e_n\}$ 是**完全的**.

标准正交基的刻画

定理

设$\{e_n\}$是Hilbert空间 H 的一个标准正交系，则以下命题等价：

1^o $\{e_n\}^{\perp}=\{\theta\}$ (即$\{e_n\}$是完全的)；

2^o 对所有的 $x\in H$, $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$;

3^o $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}=H$ (即$\{e_n\}$是标准正交基)；

4^o 对所有的 $x\in H$, $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$ (即$\{e_n\}$是完备的)；

5^o 对任意 $x,y\in H$,

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}.$$

Fourier级数的收敛性

定理

设$\{e_n\}$是内积空间H的一个标准正交系，$x \in H$，则

$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ 的充分必要条件是 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$.

标准正交基的刻画

定理

设 $\{e_n\}$ 是Hilbert空间 H 的一个标准正交系，则以下命题等价：

1^o $\{e_n\}^{\perp} = \{\theta\}$;

2^o 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$;

3^o $\overline{\text{span}\{e_n\}} = H$;

4^o 对所有的 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$;

5^o 对任意 $x, y \in H$,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)}.$$

只须证:

$1^o \Longrightarrow 2^o$

$2^o \Longrightarrow 3^o$

$3^o \Longrightarrow 1^o$

$2^o \Longrightarrow 5^o$

$5^o \Longrightarrow 1^o$

标准正交基的刻画

1^o $\{e_n\}^\perp = \{\theta\}$ $\Longrightarrow$ 2^o 对所有的 $x \in H$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$

证 对每一个 $x \in H$, 令 $y = x - \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$. 对任一正整数 k,

$$
\begin{aligned}
(y, e_k) &= (x, e_k) - \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, e_k\right) \\
&= (x, e_k) - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)(e_n, e_k) \\
&= (x, e_k) - (x, e_k) = 0,
\end{aligned}
$$

所以 $y \in \{e_n\}^\perp = \{\theta\}$, 即 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.

标准正交基的刻画

2^o 对所有的 $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n \implies 3^o \ \overline{\text{span}\{e_n\}} = H.$

证 对每一个 $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k,$

而
$$\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k \in \text{span}\{e_n\},$$

所以 $x \in \overline{\text{span}\{e_n\}}$, 由 x 的任意性知 $\overline{\text{span}\{e_n\}} = H.$

标准正交基的刻画

$$3^o \quad \overline{\operatorname{span}\{e_n\}} = H \implies 1^o \quad \{e_n\}^\perp = \{\theta\}.$$

证 设 $y \in \{e_n\}^\perp$, 则 $(y, e_n) = 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$y \in H = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}},$$

从而存在 $\{x_n\} \subset \operatorname{span}\{e_n\}$, 使得

$$x_n \to y \ (n \to \infty).$$

由于 $y \perp x_n$, 因而

$$\|y\|^2 = (y, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y) = 0,$$

所以 $y = \theta$, 即 $\{e_n\}^\perp = \{\theta\}$.

标准正交基的刻画

2^o $\boxed{\text{对所有的 } x \in H, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n}$ $\Longrightarrow$ 5^o $\boxed{\text{对所有的 } x, y \in H, \quad (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}}$

证 对所有的 $x, y \in H$,

$$(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)(e_n, y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}.$$

标准正交基的刻画

5^o $\boxed{\begin{array}{l}\text{对所有的 } x, y \in H, \\ (x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}\end{array}}$ $\Longrightarrow$ 1^o $\{e_n\}^{\perp} = \{\theta\}$.

证 设 $x \in \{e_n\}^{\perp}$. 因为 $(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)}$, 所以

$$(x,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(x, e_n)} = 0,$$

故有 $x = \theta$.

标准正交基的刻画

定理

设$\{e_n\}$是Hilbert空间 H 的一个标准正交系，则以下命题等价：

1^o $\{e_n\}^{\perp}=\{\theta\}$ (即$\{e_n\}$是完全的)；

2^o 对所有的 $x\in H$，$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$；

3^o $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}=H$ (即$\{e_n\}$是标准正交基)；

4^o 对所有的 $x\in H$，$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2$ (即$\{e_n\}$是完备的)；

5^o 对任意 $x,y\in H$，

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}.$$

标准正交基的例

例 3

在 l^2 中,

$$e_n = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{n-1}, 1, 0, \cdots), \ (n = 1, 2, \cdots)$$

是一个标准正交基.

证

对任意 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots), y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in l^2$,

$$(x, e_n) = x_n, \ (y, e_n) = y_n,$$

于是

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) \overline{(y, e_n)},$$

所以 $\{e_n\}$ 是标准正交基.

小结

- 正交基的定义
- 标准正交基的例
- 标准正交基的刻画定理