西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

泛函分析

Functional Analysis

8.1　内积空间的定义与例

$\mathbb{R}^2$中的内积

- 设 $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$，其内积定义为

$$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2,$$

于是

$$\|a\|=\sqrt{(a,b)},\qquad \cos<a,b>=\frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}.$$

并且内积满足：

1. $(a,a)\geq 0$, 且 $(a,a)=0\iff a=\theta$;
2. $(a,b)=(b,a)$;
3. $(\alpha a,c)=\alpha(a,c)$, $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$.

注 内积本质上是一个映射 $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2$中的内积

- 设 $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, 其内积定义为

$$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2,$$

于是

$$\|a\|=\sqrt{(a,b)},\qquad \cos<a,b>=\frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}.$$

并且内积满足:

1. $(a,a)\geq 0$, 且 $(a,a)=0 \iff a=\theta$;
2. $(a,b)=(b,a)$;
3. $(\alpha a+\beta b,c)=\alpha(a,c)+\beta(b,c)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

注 内积本质上是一个映射 $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}^2$中的内积

- 设 $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)\in\mathbb{C}^2$，其内积定义为

$$(a,b)=a_1\bar{b}_1+a_2\bar{b}_2,$$

并且内积满足：

1. $(a,a)\geq 0$, 且 $(a,a)=0 \iff a=\theta$;
2. $(a,b)=\overline{(b,a)}$;
3. $(\alpha a+\beta b,c)=\alpha(a,c)+\beta(b,c)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

注 内积本质上是一个映射 $(\cdot,\cdot):\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$.

内积空间的定义

定义

设 H 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，若存在映射 $(\cdot,\cdot): H\times H\to\mathbb{K}$, 使得对任意 $x,y,z\in H$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 满足:

1. $(x,x)\geq 0$, 且 $(x,x)=0 \iff x=\theta$; (非负性)
2. $(y,x)=\overline{(x,y)}$; (共轭对称性)
3. $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$; (对第一变元的线性)

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 H 上的一个**内积**，定义了内积的线性空间 H 称为**内积空间**.

内积空间的定义

注 ① 当 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 时，共轭对称性即为 $(y,x)=(x,y)$.

② 给定 $y\in H$，(x,y) 是关于 x 的线性泛函.

③ 给定 $x\in H$，(x,y) 是关于 y 的共轭线性泛函，即

$$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{(\alpha y+\beta z,x)}=\overline{\alpha(y,x)+\beta(z,x)}=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z);$$

④ $(\theta,x)=(x,\theta)=0.$

内积空间的例

例 1

对任何 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$，定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\xi_k\eta_k,$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个内积，因而 $\mathbb{R}^N$ 是一个内积空间.

证

非负性与对称性是容易验证的. 此外，

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y,z)&=\sum_{k=1}^{N}(\alpha\xi_k+\beta\eta_k)\zeta_k=\alpha\sum_{k=1}^{N}\xi_k\zeta_k+\beta\sum_{k=1}^{N}\eta_k\zeta_k\\&=\alpha(x,z)+\beta(y,z).\end{aligned}$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

内积空间的例

例 2

对任何 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{C}^N$，定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\xi_k\overline{\eta}_k,$$

容易验证 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{C}^N$ 的一个内积，因而 $\mathbb{C}^N$ 是一个内积空间.

证

非负性与共轭对称性是容易验证的. 此外，

$$(\alpha x+\beta y,z)=\sum_{k=1}^{N}(\alpha\xi_k+\beta\eta_k)\overline{\zeta_k}=\alpha\sum_{k=1}^{N}\xi_k\overline{\zeta_k}+\beta\sum_{k=1}^{N}\eta_k\overline{\zeta_k}$$

$$=\alpha(x,z)+\beta(y,z).$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_N)$, $z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_N)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

内积空间的例

例 3 对任何 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$, 定义

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k,$$

容易验证 $(\cdot,\cdot)$ 是 l^2 的一个内积，因而 l^2 是一个内积空间.

证 非负性与共轭对称性是容易验证的. 此外，

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y,z)&=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha\xi_k+\beta\eta_k)\overline{\zeta_k}=\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\zeta_k}+\beta\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\overline{\zeta_k}\\&=\alpha(x,z)+\beta(y,z).\end{aligned}$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$, $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

内积空间的例

例 4 对任何 $x=x(t), y=y(t)\in L^2[a,b]$，定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,$$

容易验证 $(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2[a,b]$ 的一个内积，因而 $L^2[a,b]$ 是一个内积空间.

证 非负性与对称性是容易验证的. 此外，

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y,z)&=\int_a^b(\alpha x(t)+\beta y(t))\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_a^b x(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b y(t)\overline{z(t)}\,\mathrm{d}t=\alpha(x,z)+\beta(y,z),\end{aligned}$$

其中 $x=x(t),\ y=y(t), z=z(t)\in L^2[a,b],\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

小结

- 内积空间的定义
- 内积空间的例

泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

8.2　内积的性质

内积空间的定义

定义

设H是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，若存在映射 $(\cdot,\cdot): H\times H\to\mathbb{K}$，使得对任意 $x,y,z\in H$，$\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，满足:

1. $(x,x)\geq 0$，且 $(x,x)=0 \iff x=\theta$; (非负性)
2. $(y,x)=\overline{(x,y)}$; (共轭对称性)
3. $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$; (对第一变元的线性)

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 H 上的一个**内积**，定义了内积的线性空间 H 称为**内积空间**.

Schwarz不等式

定理 设H是内积空间，则对任意 $x,y\in H$, 有

$$|(x,y)|^2\le (x,x)(y,y).$$

证 不妨设 $y\ne\theta$， 对任意 $\alpha\in\mathbb{K}$， 有

$$0\le (x+\alpha y,x+\alpha y)=(x,x)+2\mathrm{Re}\{\overline{\alpha}(x,y)\}+|\alpha|^2(y,y).$$

取 $\alpha=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$， 则

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,y)\ge 0,$$

因此 $|(x,y)|^2\le (x,x)(y,y)$.

Schwarz不等式

定理 设 H 是内积空间，则对任意 $x, y \in H$, 有

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

注 等号成立的充要条件是 x 与 y 线性相关.

证 令 $\alpha = (x,x)$, $\beta = (y,y)$, $\gamma = (x,y)$. 当 $|\gamma|^2 = \alpha\beta$ 时，

$$(\beta x - \gamma y, \beta x - \gamma y) = \beta^2\alpha - \beta|\gamma|^2 = \beta(\alpha\beta - |\gamma|^2) = 0,$$

因此 $\beta x = \gamma y$. 所以 x 与 y 线性相关. 反过来也成立.

内积空间的范数

定理 设 H 是内积空间，则对任意 $x \in H$，定义

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的范数.

证 由内积的定义知，

$$\|x\| \geq 0, \text{ 且 } \|x\| = 0 \iff x = \theta.$$

因为

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) = |\alpha|^2 (x,x),$$

则有

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|.$$

内积空间的范数

定理 设H是内积空间，则对任意 $x \in H$，定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

则$\|\cdot\|$是H上的范数.

证 下面只需验证$\|\cdot\|$满足三角不等式．由Schwarz不等式可得，

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = (x, x) + 2\mathrm{Re}\{(x, y)\} + (y, y) \\ &\leq (x, x) + 2(x, x)^{\frac{1}{2}}(y, y)^{\frac{1}{2}} + (y, y) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

因而 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

内积空间的范数

定义

设H是内积空间，则对任意 $x \in H$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

则$\|\cdot\|$是H上的一个范数. 称为**由内积导出的范数**.

此时，赋范空间 $(H, \|\cdot\|)$ 称为**由内积导出的赋范空间**.

注　内积空间一定是赋范空间.

内积空间的范数

定义

设 H 是内积空间，则对任意 $x \in H$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

则 $\|\cdot\|$ 是 H 上的一个范数. 称为**由内积导出的范数**.

此时，赋范空间 $(H, \|\cdot\|)$ 称为**由内积导出的赋范空间**.

注　在范数的记号下，Schwarz不等式可写成 $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$.

内积的连续性

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$$

定理 在内积空间 H 中，若 $x_n \to x$, $y_n \to y$, 则

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (n \to \infty).$$

证 由Schwarz不等式，当 $n \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\le |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| \\ &= |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\ &\le \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \end{aligned}$$

因为收敛点列$\{y_n\}$必有界，且 $x_n \to x$, $y_n \to y$, 所以

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (n \to \infty).$$

Hilbert空间的定义

定义

设H是内积空间，如果由内积诱导的赋范空间是完备的，则称 H 是**完备的**．完备的内积空间称为**Hilbert空间**．

Hilbert空间的例

例 1 $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N, l^2, L^2[a,b]$ 在各自的内积定义下都是Hilbert空间.

非Hilbert空间的例

例 2

$C[a,b]$按照内积 $(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t$

是内积空间，但不是Hilbert空间.

证

内积诱导的范数是

$$\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

范数诱导的距离是

$$d(x,y)=\left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$(C[a,b],d)$ 不完备，所以内积空间不是Hilbert空间.

小结

- Schwarz不等式
- 内积空间的范数
- 内积的连续性
- Hilbert空间的定义与例

泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

8.3　内积与范数

内积空间的范数

定义

设H是内积空间，则对任意 $x \in H$, 定义
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$
则$\|\cdot\|$是H上的一个范数. 称为**由内积导出的范数**.

注　内积空间一定是赋范空间.

内积空间的范数

定义

设H是内积空间，则对任意 $x \in H$, 定义

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

则$\|\cdot\|$是 H 上的一个范数. 称为**由内积导出的范数**.

赋范空间一定是内积空间吗？也就是说：

在赋范空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上是否可以定义内积，使得$\|\cdot\|$ 是由内积诱导的？

极化恒等式(实空间)

定理

设 H 是实内积空间，则对任意 $x, y \in H$, 有

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

证

由 H 为实内积空间知，$(x, y) = (y, x)$. 对任意 $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2,$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2,$$

以上两式相减即得.

极化恒等式(复空间)

定理　设 H 是复内积空间，则对任意 $x, y \in H$, 有

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

证　由 H 为复内积空间知，$(x, y) = \overline{(y, x)}$. 对任意 $x, y \in H$,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2,$$

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2,$$

$$\|x + iy\|^2 = (x + iy, x + iy) = \|x\|^2 - i(x, y) + i(y, x) + \|y\|^2,$$

$$\|x - iy\|^2 = (x - iy, x - iy) = \|x\|^2 + i(x, y) - i(y, x) + \|y\|^2.$$

极化恒等式(复空间)

定理 设 H 是复内积空间，则对任意 $x, y \in H$, 有

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2).$$

证 由 H 为复内积空间知，$(x,y)=\overline{(y,x)}$. 对任意 $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2,\\
-\|x-y\|^2 &= -\|x\|^2+(x,y)+(y,x)-\|y\|^2,\\
i\|x+iy\|^2 &= i\|x\|^2+(x,y)-(y,x)+i\|y\|^2,\\
-i\|x-iy\|^2 &= -i\|x\|^2+(x,y)-(y,x)-i\|y\|^2.
\end{aligned}$$

平行四边形法则

定理 设 H 是内积空间，则对任意 $x, y \in H$, 有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

证 对任意 $x, y \in H$, 由内积的性质可得，

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2,$$

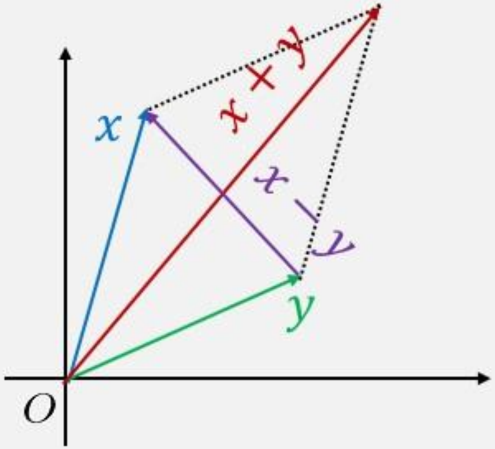
$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2.$$

平行四边形法则

定理

设 H 是内积空间，则对任意 $x, y \in H$, 有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$



从范数到内积

定理 设$(X, \|\cdot\|)$是赋范空间. 如果范数$\|\cdot\|$满足平行四边形法则，则该范数可由一个内积导出.

证明大意

设 X 是**实**赋范空间. 对任意 $x, y \in X$, 定义

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2),$$

只需证明

1. $(x, x) \geq 0$, 且 $(x, x) = 0 \iff x = 0$;
2. $(y, x) = (x, y)$;
3. $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$, $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

因此$(\cdot, \cdot)$是 X 的内积, 且 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

从范数到内积

定理 设$(X, \|\cdot\|)$是赋范空间. 如果范数$\|\cdot\|$满足平行四边形法则，则该范数可由一个内积导出.

证明大意

设 X 是复赋范空间. 对任意 $x, y \in X$, 定义

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

只需证明

1. $(x, x) \geq 0$, 且 $(x, x) = 0 \iff x = 0$;
2. $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
3. $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$, $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

因此$(\cdot, \cdot)$是 X 的内积, 且 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

从范数到内积

定理 设$(X,\|\cdot\|)$是赋范空间. 如果范数$\|\cdot\|$满足平行四边形法则，则该范数可由一个内积导出.

注 若赋范空间的范数不能由内积导出，则称赋范空间不是内积空间.

从范数到内积

例 1 $(C[0,1],\|\cdot\|)$ 不是内积空间，其中 $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$.

证 令 $x(t)=1,\ y(t)=t,$ 则

$$x+y=1+t,\ x-y=1-t,$$

于是

$$\|x\|=1,\ \|y\|=1,\ \|x+y\|=2,\ \|x-y\|=1,$$

因而 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$ 而 $\|x\|^2+\|y\|^2=2.$

所以 $C[0,1]$ 的范数不满足平行四边形法则.

例 2 当 $p \neq 2$ 时 $(L^p[0,1], \|\cdot\|_p)$不是内积空间，其中 $\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$.

证 令 $x(t) = 1,\quad y(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$ 则有

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2^{3-\frac{2}{p}} \quad 而 \quad 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = 2^2.$$

当 $p \neq 2$ 时，

$$3 - \frac{2}{p} \neq 2.$$

所以当 $p \neq 2$ 时 $\|\cdot\|_p$ 不满足平行四边形法则.

小结

- 极化恒等式
- 平行四边形法则
- 从范数到内积