泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

6.1 Banach空间

Banach空间的定义

定义

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间， d 是由范数诱导的距离，若 (X, d) 是完备的距离空间，则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为**Banach空间**.

Banach空间的例

例 1

空间 $\mathbb{R}^N, l^\infty, C[a,b]$ 均为Banach空间.

Banach空间的例

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

例 2

p 次可和数列空间 $l^p(1 \le p < \infty)$ 是Banach空间.

证

设$\{x^{(n)}\}$是 l^p 的任一柯西列，则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n, m > N$ 时，

对每一个任何 $k = 1, 2, \cdots$,

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}| \le \|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

即$\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}$ 中的柯西列，则存在 $\xi_k \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$.

令 $x = \{\xi_k\}$, 下证 $x \in l^p$, 并且

$$x^{(n)} \to x \ (n \to \infty).$$

Banach空间的例

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

例 2 p 次可和数列空间 $l^p(1 \leq p < \infty)$ 是Banach空间.

证 对任一个 $l = 1, 2, \cdots$，当 $n, m > N$ 时，$\sum_{k=1}^{l} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p$.

先令 $m \to \infty$，再令 $l \to \infty$，当 $n > N$ 时，

$$\|x^{(n)} - x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(n)} - \xi_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

从而 $x^{(N+1)} - x \in l^p$，且

$$x^{(n)} \to x \ (n \to \infty).$$

所以

$$x = x^{(N+1)} - (x^{(N+1)} - x) \in l^p.$$

Banach空间的例

例 3

p 次可积函数空间 $L^p(E)\,(1 \leq p < \infty)$ 是Banach空间.

赋范空间中的级数

在赋范空间$(X, \|\cdot\|)$中定义无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots ,$$

其中 $x_n \in X \ (n = 1, 2, \cdots)$.

赋范空间中的级数

定义

设$\{x_n\}$是赋范空间X中的点列. 若它的前n项和

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

收敛，即存在$x \in X$, 使得$S_n \to x\ (n \to \infty)$. 则称$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **收敛**,

并称x为级数的**和**，记为$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

若$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **绝对收敛**.

Banach空间的性质

定理 设 X 是赋范空间，则 X 是Banach空间的充要条件是 X中任一绝对收敛的级数都收敛.

证 （必要性）设 X 是Banach空间，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛. 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列为$\{S_n\}$. 由数项级数的柯西收敛准则，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，对任意的正整数 p，

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \le \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon,$$

因此$\{S_n\}$ 是X 中的柯西列，由完备性知 $\{S_n\}$收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

Banach空间的性质

定理 设 X 是赋范空间，则 X 是Banach空间的充要条件是 X中任一绝对收敛的级数都收敛.

证 （充分性）设 X 中每一绝对收敛的级数都收敛. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列，对 $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}\ (k=1,2,\cdots)$，存在 $n_k \in \mathbb{N}$，(不妨设 $n_k < n_{k+1}$) 使得

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad (k=1,2,\cdots).$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ 收敛知，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 收敛. 即 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，因而 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛. 所以 X 是完备的.

子空间的完备性

定理

设X 是Banach空间， E 是 X 的子空间，则 E 是Banach空间的充要条件是E为 X 的闭子空间.

回顾

设(X,d)是完备的距离空间，E 是X的子集．则(E,d) 完备的充要条件是 E 为X的闭集.

非闭子空间的例

例 设$\mathcal{P}[0,1]$是$[0,1]$上的多项式全体，则 $\mathcal{P}[0,1]$ 作为 $C[0,1]$ 的子空间不是Bananch空间.

证 令
$$p_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\ (n=1,2,\cdots).$$

并记 $p(t)=e^t$. 则 $\{p_n\}\subset\mathcal{P}[0,1]$, 且

$$\|p_n-p\|=\max_{t\in[0,1]}|p_n(t)-e^t|=\max_{t\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right|$$
$$=\max_{t\in[0,1]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\to 0\ (n\to\infty),$$

故 $p_n\to p$. 但 $p\notin\mathcal{P}[0,1]$, 所以 $\mathcal{P}[0,1]$ 不是闭子空间，从而不完备.

赋范空间的完备化

定理　任何赋范空间均可完备化. 即

设 X 是赋范空间，必存在Banach空间 $\widetilde{X}$，使得 X 与 $\widetilde{X}$ 的稠密子空间等距同构.

注　$\mathcal{P}[0,1]$ 的完备化空间是 $C[0,1]$.

小结

- Banach空间的定义
- Banach空间的例
- Banach空间的性质
- 子空间的完备性
- 赋范空间的完备化

泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

6.2　凸集与子空间

凸集

定义

设 X 是线性空间, $A \subset X$, 若对任意 $x, y \in A$, 任意的 $\alpha \in [0,1]$, 有

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A,$$

则称 A 是 X 中的**凸集**.

凸集

命题 设 A, B 是 X 中的凸集，则 $A \cap B$ 也是 X 中的凸集.

证 对任意的 $x, y \in A \cap B$，任意的 $\alpha \in [0,1]$，有

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A,$$

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in B,$$

因而

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in A \cap B.$$

单位开球是凸集

命题 赋范空间 X 的单位开球 $B(\theta,1)=\{x\in X \mid \|x\|<1\}$ 是凸集.

证 对任意 $x,y\in B(\theta,1),\alpha\in[0,1]$, 有

$$\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\le\|\alpha x\|+(1-\alpha)\|y\|<\alpha+(1-\alpha)=1,$$

因而 $\alpha x+(1-\alpha)y\in B(\theta,1)$. 所以 $B(\theta,1)$ 是凸集

注 单位球是零元的一个凸邻域,这是赋范空间十分重要的几何特征.

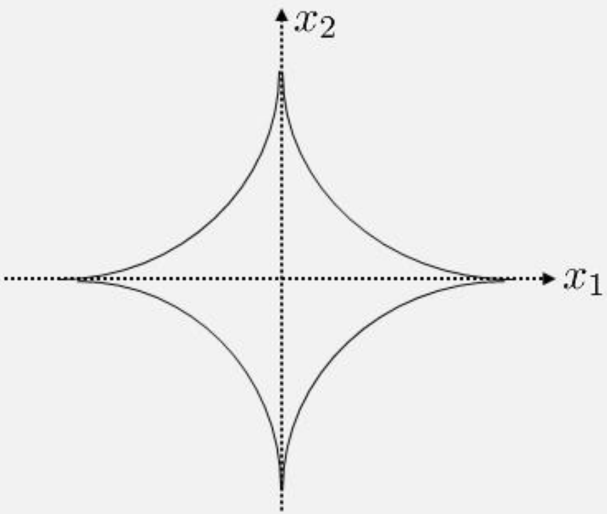
单位开球是凸集

例

设 X 是全体有序实数组 $x=(x_1,x_2)$, 其上定义

$$\varphi(x)=(\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|})^2$$

则曲线 $\varphi(x)=1$ 围成的区域不是凸集, 从而 $\varphi(x)$不是 X 上的范数.



赋范子空间

定义

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间， E 是 X 的线性子空间，则 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，称之为 $(X, \|\cdot\|)$ 的子空间.

注　赋范空间的子空间是凸集.

子空间的性质

定理 设$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，E是 X 的子空间，且 E 是开集，则 $E = X$.

证 对任意 $x \in X$, 只需证明 $x \in E$.

① 当 $x = \theta$ 时，由于 E 是子空间，故 $x = \theta \in E$.

② 当 $x \neq \theta$ 时，因为 E 是开集且 $\theta \in E$，故存在 $\delta > 0$，使得 $B(\theta, \delta) \subset E$.

因而 $\dfrac{\delta x}{2\|x\|} \in E$，于是 $x = \dfrac{2\|x\|}{\delta}\left(\dfrac{\delta x}{2\|x\|}\right) \in E$.

子空间的性质

定理 设$(X, \|\cdot\|)$是赋范空间，E是X的子空间，且E是开集，则$E = X$.

注 定理表明赋范空间的真子空间不能是开集.

非闭子空间的例

例 1 设$\mathcal{P}[0,1]$是$[0,1]$上的多项式全体，则 $\mathcal{P}[0,1]$ 作为 $C[0,1]$ 的子空间不是闭子空间.

非闭子空间的例

例 2 设 $E = \left\{ x = \{\xi_n\} \in l^\infty \mid \text{存在正整数} N,\ \text{当} n > N \text{时},\ \xi_n = 0 \right\}$则 E是 l^∞的真子空间，但不是闭的.

证 令 $y_n = (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots),\ y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots).$

则$\{y_n\} \subset E$. 并且

$$\|y_n - y\| = \|(0, \cdots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots)\| = \frac{1}{n+1}$$

因此 $y_n \to y\,(n \to \infty)$, 但是 $y \notin E$. 因此 E 不是闭的.

小 结

- 凸集的定义
- 开球与子空间的凸性
- 子空间的性质
- 非闭子空间的例

泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

6.3 Schauder基与可分性

Hamel 基

定义

设 X 是线性空间. 若存在 $B \subset X$, 满足

1. B 是线性无关集,
2. $\operatorname{span}\{B\} = X$,

则称 B 是 X 的**Hamel基**.

定理

任何非$\{\theta\}$线性空间必存在Hamel基.

赋范空间的Schauder基

定义

设 X 是无限维的赋范空间，$\{e_n\}$是 X中的点列，若对任意 $x \in X$, 存在唯一的数列$\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$，使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

则称$\{e_n\}$ 为 X 的**Schauder基**.

具有Schauder基的空间

例 1 在空间 $l^p\ (p \geq 1)$ 中，令 $e_n = \{\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1\ \text{个}}, 1, 0, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$

则 $\{e_n\}$ 是 l^p 的一个Schauder基.

证 对每一个 $x \in l^p$, $x = \{\xi_n\}$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ 知

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| = \|(0, \cdots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots)\|$$
$$= \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0\ \ (n \to \infty),$$

从而

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$$

具有Schauder基的空间

例 1 在空间 $l^p\ (p \geq 1)$ 中，令 $e_n = \{\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1\text{ 个}}, 1, 0, \cdots\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$

则 $\{e_n\}$ 是 l^p 的一个Schauder基.

证 设 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n e_n$, 则对每一个 $i \in \mathbb{N}$, 当 $n > i$ 时,

$$|\eta_i - \xi_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k - \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(\eta_1 - \xi_1, \cdots, \eta_n - \xi_n, 0, \cdots)\|$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\| \to \|x - x\| = 0\ (n \to \infty).$$

所以

$$\eta_i = \xi_i\ (i = 1, 2, \cdots).$$

具有Schauder基的空间

例 2

连续函数空间 $C[0,1]$ 具有Schauder基.

Schauder基与可分性

定理 具有Schauder基的赋范空间 X 是可分的.

证 设$\{e_n\}$是X的Schauder基，记 $A=\left\{\sum_{k=1}^{n} q_k e_k \mid q_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\right\}.$

则A是可数集，下证 A 在 X 中稠密.

对任一个$x \in X$，存在 $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}$，使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n.$

任给 $\varepsilon>0$，存在$n \in \mathbb{N}$, 使得 $\|\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k\|<\frac{\varepsilon}{2}.$

Schauder基与可分性

定理 具有Schauder基的赋范空间 X 是可分的.

证 由 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，存在 $q_k \in \mathbb{Q}\ (k=1,2,\cdots,n)$，使得

$$|\xi_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}\|e_k\|}.$$

令 $a = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k e_k$，则 $a \in A$，且

$$\|x-a\| \le \|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - q_k)e_k\| + \|\sum_{k=n+1}^{\infty}\xi_k e_k\| < \varepsilon.$$

所以 A 是 X 的可数稠子集.

Schauder基与可分性

例

空间 l^{∞} 不具有Schauder基.

是否每个可分的赋范空间都具有Schauder基?

答案是否定的. 1973年数学家P. Enflo 给出了反例.

小结

- Schauder基的定义与例
- Schauder基与可分性