泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

10.1　Hilbert空间的正交基

Schmidt 正交化

定理 设$\{x_n\}_{n\geq 1}$是内积空间 H的线性无关集，则存在标准正交系$\{e_n\}_{n\geq 1}$，使得对任意正整数 n，有

$$\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}.$$

证 因为 $x_1\neq\theta$，令 $e_1=\dfrac{x_1}{\|x_1\|}$，则有$\|e_1\|=1$，且 $\mathrm{span}\{e_1\}=\mathrm{span}\{x_1\}$.

令 $y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$，由$\{x_1,x_2\}$线性无关知 $y_2\neq\theta$. 由于

$$(y_2,e_1)=0,$$

则有 $y_2\perp e_1$. 取 $e_2=\dfrac{y_2}{\|y_2\|}$，故$\|e_2\|=1$，$e_2\perp e_1$，且

$$\mathrm{span}\{e_1,e_2\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2\}.$$

Schmidt 正交化

定理 设$\{x_n\}_{n\geq 1}$是内积空间 H的线性无关集，则存在标准正交系$\{e_n\}_{n\geq 1}$，使得对任意正整数 n，有

$$\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}.$$

证 一般地，令 $y_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,e_k)e_k$，

则有 $y_n\neq\theta$， 且 $y_n\perp e_k$ $(k=1,\cdots,n-1)$.

取 $e_n=\dfrac{y_n}{\|y_n\|}$， 则$\{e_n\}$ 即为所求.

可分Hilbert空间的正交基

定理 设H是Hilbert空间，则H可分的充要条件是H有至多可数的标准正交基.

证 （必要性）由可分性的定义，设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是H的可数稠密子集. 其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ $(N \le \infty)$.

取 y_1 为 $\{x_n\}$中第一个非零元素，y_2 为$\{x_n\}$中第一个与 y_1线性无关的向量，y_3 为$\{x_n\}$中第一个与 y_1, y_2 线性无关的向量. 依次下去.

可分Hilbert空间的正交基

定理 设H是Hilbert空间，则H可分的充要条件是H有至多可数的标准正交基.

证 （必要性）由可分性的定义，设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是H的可数稠密子集．其中必存在一个线性无关的子集 $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ $(N \leq \infty)$.

将其Schmidt正交化，得到标准正交系 $\{e_n\}_{n=1}^{N}$．并且

$$\mathrm{span}\{e_n\} = \mathrm{span}\{y_n\} = \mathrm{span}\{x_n\}.$$

因为$\overline{\{x_n\}} = H$，所以

$$\overline{\mathrm{span}\{e_n\}} = H,$$

即$\{e_n\}_{n=1}^{N}$为H的标准正交基。

可分Hilbert空间的正交基

定理 设H是Hilbert空间，则H可分的充要条件是H有至多可数的标准正交基.

证 （充分性）设$\{e_n\}_{n=1}^N$是H的一个至多可数的标准正交基，则集合

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k \mid n\in\mathbb{N},\ \mathrm{Re}\alpha_k\in\mathbb{Q},\mathrm{Im}\alpha_k\in\mathbb{Q}\,(\,k=1,2\cdots,n)\right\}$$

是H的一个可数子集．只需证明A在H中稠密.

事实上，由标准正交基的等价刻画，对任意$x\in H$，以及任意$\varepsilon>0$，

存在$\{\beta_n\}\subset\mathbb{K}$，使得
$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_n e_n.$$

可分Hilbert空间的正交基

定理 设H是Hilbert空间，则H可分的充要条件是H有至多可数的标准正交基.

证 （充分性）由 $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2<\infty$ 知，存在正整数 K，使得 $\sum_{n=K+1}^{\infty}|\beta_n|^2<\frac{\varepsilon^2}{2}$.

对每一个 $\beta_n\ (n=1,2,\cdots,K)$，必存在有理数 α_n，使得

$$|\beta_n-\alpha_n|^2<\frac{\varepsilon^2}{2K},$$

令 $y=\sum_{n=1}^{K}\alpha_n e_n$，则 $\|x-y\|^2=\sum_{n=1}^{K}|\beta_n-\alpha_n|^2+\sum_{n=K+1}^{\infty}|\beta_n|^2<\varepsilon^2$.

这说明 A 在 H 中稠密. 所以H是可分的.

Hilbert 空间的正交基

定理 任一非零的Hilbert空间 H 必有标准正交基.

注 定理的证明需要用Zorn引理.

小结

- **Schmidt**正交化定理
- 可分**Hilbert**空间的正交基
- 非零**Hilbert**空间的正交基

泛函分析

Functional Analysis

西北大学

NORTHWEST UNIVERSITY

10.2　Hilbert空间的同构

内积空间的同构

定义

设 X, Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间，其上的内积分别为 $(\cdot,\cdot)_X, (\cdot,\cdot)_Y$.

若存在线性同构映射 $T: X \to Y$，使得对任意 $x, y \in X$，有

$$(Tx, Ty)_Y = (x, y)_X,$$

则称 T 为 X 到 Y 的**内积同构映射**，并称 X 与 Y **内积同构**.

注　内积同构是一个等价关系.

同构概念的比较

<table>
<tr><th>空间</th><th>概念</th><th colspan="2">存在双射 $T : X \to Y$, 使得</th></tr>
<tr><td>距离空间</td><td>等距同构</td><td colspan="2">$d(Tx, Ty) = d(x, y)$</td></tr>
<tr><td>线性空间</td><td>线性同构</td><td rowspan="3">$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$</td><td></td></tr>
<tr><td>赋范空间</td><td>拓扑同构</td><td>T, T^{-1} 连续</td></tr>
<tr><td>内积空间</td><td>内积同构</td><td>$(Tx, Ty)_Y = (x, y)_X$</td></tr>
</table>

同构概念的比较

注1 内积同构是线性同构、等距同构、拓扑同构.

证 内积同构映射保持范数不变:

$$\|Tx\| = \sqrt{(Tx, Tx)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|,$$

因而对任意 $x, y \in X$, 有

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|.$$

由此可知内积同构是一种等距同构，且 T, T^{-1} 均连续,

所以内积同构也是一种拓扑同构.

同构概念的比较

注 1　内积同构是线性同构、等距同构、拓扑同构.

注 2　内积同构的两个空间可视为同一个 内积空间.

可分Hilbert空间的同构

定理 N维Hilbert空间 H 与$\mathbb{K}^N$内积同构。

证 由于H是 N 维的，则H中有N 个线性无关的向量， 利用Schmidt正交化方法，可得H 的标准正交基$\{e_1, \cdots, e_N\}$. 定义映射$T: H \to \mathbb{K}^N$为

$$Tx = ((x, e_1), \cdots, (x, e_N))$$

则 T 为线性双射. 并且

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{N} (x, e_k)\overline{(y, e_k)} = (Tx, Ty),$$

所以 T 是 H 到$\mathbb{K}^N$的内积同构映射。

标准正交基的刻画

定理

设$\{e_n\}$是Hilbert空间 H 的一个标准正交系，则以下命题等价：

1^o $\{e_n\}^{\perp} = \{\theta\}$（即$\{e_n\}$是完全的）；

2^o 对所有的 $x \in H$，$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$；

3^o $\overline{\text{span}\{e_n\}} = H$（即$\{e_n\}$是标准正交基）；

4^o 对所有的 $x \in H$，$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$（即$\{e_n\}$是完备的）；

5^o 对任意 $x, y \in H$，

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}.$$

可分Hilbert空间的同构

定理 无限维可分Hilbert空间 H 与 l^2 内积同构.

证 由于 H 是无限维可分Hilbert空间，则 H 有一个可数的标准正交基 $\{e_n\}$.
对任意 $x \in H$，令

$$Tx = ((x, e_1), \cdots, (x, e_n), \cdots).$$

则由Parseval等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2 < \infty$，可得 $Tx \in l^2$.

则 T 是 H 到 l^2 的线性映射. 易证 T 为双射. 并且,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_k)\overline{(y, e_k)} = (Tx, Ty).$$

Riesz-Fischer定理

定理 设$\{e_n\}$是Hilbert空间 H 的标准正交系，$\{\xi_n\}\in l^2$, 则存在 $x\in H$，使得

$$\xi_n=(x,e_n)\ \ (n=1,2,\cdots).$$

证 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k\ \ (n=1,2,\cdots)$，由勾股定理知，对任意的正整数 p,

$$\|S_{n+p}-S_n\|^2=\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\xi_k e_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p}|\xi_k|^2,$$

由于$\{\xi_n\}\in l^2$，故$\{S_n\}$是 H 中柯西列. 由 H 的完备性知，存在 $x\in H$,

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n=\lim_{n\to\infty}S_n=x,\ \xi_n=(x,e_n)\ \ (n=1,2,\cdots).$$

可分Hilbert空间的同构

定理 无限维可分Hilbert空间 H 与 l^2 内积同构.

证 由于H 是无限维可分Hilbert空间, 则 H 有一个可数的标准正交基$\{e_n\}$. 对任意 $x \in H$, 令

$$Tx = ((x, e_1), \cdots, (x, e_n), \cdots).$$

则由Parseval等式 $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2 < \infty$, 可得 $Tx \in l^2$.

则 T 是 H 到 l^2 的线性映射. 易证T为双射. 并且,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_k)\overline{(y, e_k)} = (Tx, Ty).$$

可分Hilbert空间的同构

定理 无限维可分Hilbert空间 H 与 l^2 内积同构.

注 在内积同构的意义下，无限维的可分Hilbert空间只有一个就是 l^2.

小结

- 内积同构的定义
- 同构概念的比较
- 可分**Hilbert**空间的同构

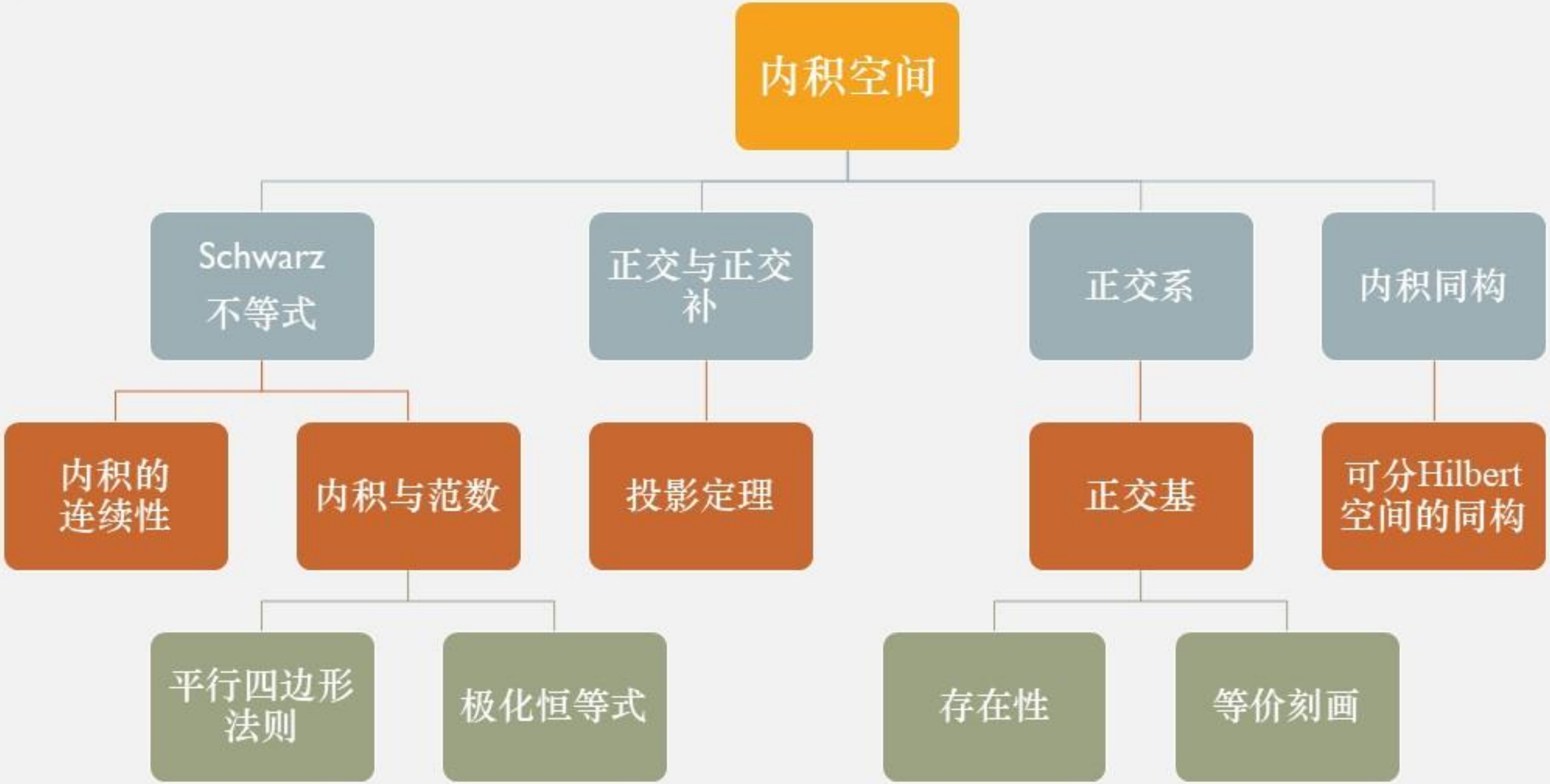
泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

10.3　知识小结

一、知识框图


内积空间
Schwarz
不等式
正交与正交
补
正交系
内积同构
内积的
连续性
内积与范数
投影定理
正交基
可分Hilbert
空间的同构
平行四边形
法则
极化恒等式
存在性
等价刻画

二、知识串讲　　1 常见空间的例

空间	距离	性质	标准正交基
$\mathbb{R}^N$	$(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\xi_n\eta_n$	可分Hilbert空间	$\{e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\}_{n=1}^{N}$
$\mathbb{C}^N$	$(x,y)=\sum_{n=1}^{N}\xi_n\overline{\eta}_n$	可分Hilbert空间	$\{e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\}_{n=1}^{N}$
l^2	$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n$	可分Hilbert空间	$\{e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\}_{n=1}^{\infty}$
$L^2[a,b]$	$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$	可分Hilbert空间	$\left\{e_n=\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\ :\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$

二、知识串讲

2 内积的定义

① 内积满足Schwarz不等式.

② 内积是连续的.

③ 内积空间一定是赋范空间.

④ 线性空间上的范数可由内积导出的充分必要条件是范数满足平行四边形法则。

二、知识串讲 2 正交与正交补

1. 在内积空间中，两两正交的向量组满足勾股定理.
2. 一个子集的正交补一定是内积空间的闭子空间.
3. 在内积空间中，最佳逼近点与投影是等价的.
4. Hilbert空间可表示成闭子空间与其正交补的直和.

3 正交系与Fourier级数

1. 内积空间的一个正交系是线性无关集.
2. 在Hilbert空间中，任一向量 x 关于正交系 $\{e_n\}$ 的Fourier级数都是收敛的.
3. 是否收敛于x，取决于正交系是否完备（Parsval等式）.

二、知识串讲　　4 正交基

1. Hilbert空间中的一个正交系是正交基的充分必要条件是：正交系的完备性、正交系的完全性.

2. 可分Hilbert空间的标准正交基是存在的，且是至多可数集.

3. 任何非零空间的Hilbert空间都存在标准正交基.

5 内积同构

1) 内积同构一定是等距同构、线性同构、拓扑同构.

2) 在内积同构意义下，可分Hilbert空间只有两个.

3) 数域 K 上的 N 维内积空间都与 K^N 内积同构.

4) 无限维可分Hilbert空间都与 l^2 内积同构.

泛函分析

Functional Analysis

西北大学
NORTHWEST UNIVERSITY

10.4　典型例题

一、内积与范数

例 1　举出至少两个赋范空间 X，使得 X 上的范数不能由内积导出.

二、正交与正交补

例 2 设 X 是实内积空间，$x, y \in X$ 满足 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$，则 $x \perp y$.

但在复内积空间中上述结论不成立.

证 因为 $(x, y) = (y, x)$，则有

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2,$$

从而 $(x, y) = 0$. 即 $x \perp y$.

在复数空间 $\mathbb{C}$ 中，内积为 $(x, y) = x\bar{y}$. 取 $x = 1$，$y = i$.

则

$$\|x+y\|^2 = 2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

但是

$$(x, y) = -i \neq 0.$$

二、正交与正交补

例 3

设$C[-1,1]$是$[-1,1]$上的实连续函数全体，内积为

$$(x,y)=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

令M为$[-1,1]$上的实连续奇函数全体，求$M^{\perp}$.

证明思路

设 $y\in M^{\perp}$，令 $z(t)=y(t)-y(-t)$. 证明 $z(t)=0$.

二、正交与正交补

例 4　设M是Hilbert空间 H 的子集，则$(M^{\perp})^{\perp}$是包含M的最小闭子空间.

证明思路

只需证明 $\overline{\mathrm{span}M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

三、正交系与正交基

例 5

设$\{e_n\}$是内积空间H 的标准正交系，则对任意 $x,y\in H$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\leq\|x\|\|y\|.$$

证明思路

利用级数形式的Hölder不等式以及Bessel不等式.

三、正交系与正交基

例 6

设 $S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是内积空间 H 的标准正交系，则对任意 $x\in H$,

$$\{(x,e_\alpha)\,|\,\alpha\in I\}$$

中至多只有可列个不为零，且

$$\sum_{\alpha\in I}|(x,e_\alpha)|^2\le\|x\|^2.$$

证明思路

对任意 $m\in\mathbb{N}$, $S_m=\{e_\alpha\,|\,|(x,e_\alpha)|\ge\frac{1}{m}\}$只能是有限集.

$$S'=\bigcup_{m=1}^{\infty}S_m$$

是可数集，且对任意 $e_\alpha\in S\setminus S'$, 有 $(x,e_\alpha)=0$.